

# REALIMENTACIÓN ASISTIDA POR COMPUTADORA PARA LA CORRECCIÓN DE ERRORES ALGEBRAICOS DE ALUMNOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

**Rebeca Ascencio, Elena Nesterova, Cristina Eccius-Wellmann**

Universidad de Guadalajara. (México), Universidad de Guadalajara. (México), Universidad Panamericana Campus Guadalajara. (México)  
rebecaascencio@hotmail.com, elena.nesterova@cucei.udg.mx, ceccius@up.edu.mx

**RESUMEN:** Los alumnos de Cálculo Diferencial presentan deficiencias algebraicas que afectan su desempeño y que no pueden atenderse adecuadamente en clase. El objetivo de este estudio fue evaluar la influencia del empleo de un programa de cómputo, como una actividad extra-clase, sobre el desempeño algebraico de los alumnos. Este programa los realimenta sobre las causas de los errores algebraicos y les permite practicar hasta contestar correctamente. Se contó con un grupo de control, que no utilizó el programa y tres grupos experimentales, que sí lo usaron. Se contrastaron las medias de las diferencias entre el porcentaje de errores algebraicos cometidos en un pretest y un postest en los cuatro grupos. Se concluyó que las medias de los grupos experimentales, fueron significativamente mayores a la del grupo de control, por lo que el programa puede influir positivamente en el desempeño de los alumnos. Además, se recabó la opinión de los mismos acerca de su experiencia al usar el programa, la cual fue positiva.

**Palabras clave:** errores algebraicos, realimentación por computadora

**ABSTRACT:** The students of Differential Calculus experience difficulties in Algebra that cannot be properly tackled in class, so they affect the students' performance. The aim of this study was to evaluate the influence of a computing program, used as an out of class activity, on the students' performance in Algebra. This program provides them with feedback about the causes of algebraic errors, and allows them to practice until getting the correct answer. The experiment involved four groups; the control group didn't use the program, while three experimental groups used it. We compared the average of the differences between the algebraic errors obtained in both a pre-test and a post-test, in the four groups. The findings of the current study show that the experimental groups average performances were significantly greater than the control group's ones. Therefore, the computing program can positively influence on the students' performance. Besides, when the students were asked about their experience with the use of the program, they expressed positive opinions.

**Key words:** algebraic errors, computer feedback

### ■ Planteamiento del problema

Los alumnos que cursan la materia de Cálculo Diferencial, a nivel universitario, suelen presentar deficiencias algebraicas que afectan su desempeño en dicha materia. Por ejemplo, aplican correctamente una regla de derivación, pero la respuesta final es incorrecta, debido a errores en operaciones algebraicas (Díaz, 2009). Gill y Greenhow (2008) señalan que los estudiantes universitarios provienen de un número cada vez mayor y más variado de instituciones de educación media y media superior, por lo que su nivel de conocimientos y habilidades matemáticas es heterogéneo.

Santa Cruz, Thomsen, Beas, y Rodríguez (2011) observaron clases de matemáticas, preguntaron a los profesores y notaron que las equivocaciones de los alumnos no suelen formar parte de la planificación de la enseñanza, aunque reconocen que siempre ocurren. Lo que suelen hacer los profesores es señalar repetidamente los procedimientos correctos ante los errores que observan, lo cual no es suficiente para erradicarlos (Pochulu, 2005).

Por otro lado, Umbarila (2009) señala la conveniencia de permitir, en la educación superior, mayores espacios académicos extra clase, para que los alumnos aprendan nuevamente los conceptos básicos de la educación media que no recuerdan con precisión. Esto último se manifiesta en las deficiencias observadas en alumnos de reciente ingreso a la universidad.

Puede ser benéfico para los alumnos encontrar una forma de proporcionarles realimentaciones, en una cantidad, calidad, profundidad y oportunidad adecuadas, mediante un programa de cómputo (Gill y Greenhow, 2008).

En esta investigación se propone una estrategia correctiva, que consiste en el empleo de actividades extra-clase mediante un programa de cómputo accesible desde internet, para realimentar a los alumnos sobre las causas de los errores que cometen en procedimientos algebraicos requeridos en la materia de Cálculo Diferencial. Este programa les permite practicar hasta contestar correctamente.

### ■ Objetivo

Evaluar la influencia, sobre el desempeño algebraico de los alumnos, del empleo de un programa de cómputo, como una actividad extra-clase, que realimenta al alumno de Cálculo Diferencial sobre las causas de sus errores algebraicos.

### ■ Pregunta de investigación

¿Cuál es la influencia del empleo de la estrategia propuesta sobre el porcentaje de errores algebraicos que cometen los alumnos en Cálculo Diferencial?

## ■ Marco referencial

Según la Teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, Novak y Hanesian, 1997), para que un nuevo contenido sea significativo, el alumno debe incorporarlo a los conocimientos que ya posee. Por lo tanto, las bases algebraicas, correctas e incorrectas, juegan un papel importante en la adquisición de contenido significativo de la materia de Cálculo Diferencial.

Por otro lado, Rico (1995) considera que la mayoría de los errores algebraicos que cometen los estudiantes tienen su raíz en estructuras conceptuales profundas, por lo que para que se logre la corrección de los errores, es necesario apartarse de procedimientos algorítmicos para buscar desarrollar estructuras conceptuales correctas, lo cual sería posible si se conocen las causas de los errores algebraicos, mismas que han sido estudiadas por diversos investigadores (Cervantes y Martínez, 2007; Eccius, 2008).

La corrección de la comprensión equivocada requiere una reestructuración mental que el alumno puede llevar a cabo mediante un aprendizaje autorregulado, a través de las actividades de realimentación de la causa de la equivocación, proporcionadas por un programa de cómputo (Santa Cruz, Thomsen, Beas y Rodríguez, 2011).

Hattie y Timperley (2007) sugieren que la realimentación más efectiva proporciona estrategias de entendimiento de los conceptos y procesos y debe ser: inmediata, clara, concreta, intencionada, significativa y personal. Mediante un programa de cómputo con el diseño adecuado, se puede atender, con propósitos remediales, a alumnos que presenten errores algebraicos conceptuales específicos al estudiar Cálculo Diferencial (Sancho, 1996).

Para Meza, Garita y Villalobos (1997) el uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe enmarcarse en un planeamiento educativo. Su empleo permite diseñar estrategias didácticas que no es posible desarrollar con otros medios. Los mismos autores mencionan que la computadora no resuelve milagrosamente los problemas asociados con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La eficiencia de su uso depende de las estrategias implementadas en los programas de cómputo y principalmente, del compromiso de los estudiantes con su aprendizaje.

Se considera, por tanto, que unas actividades realizadas por los alumnos mediante un programa de cómputo, diseñado específicamente para realimentarlos sobre las causas de sus errores algebraicos, puede disminuir el porcentaje de errores algebraicos cometidos por dichos alumnos.

## ■ Metodología y descripción del programa usado en la estrategia

La experimentación se llevó a cabo con los alumnos de cuatro grupos de Cálculo Diferencial, de segundo y tercer semestre de las carreras administrativas de la Universidad Panamericana, campus

Guadalajara, en el semestre agosto - diciembre 2015. Tres grupos fueron experimentales (con 50 alumnos en total) y uno fue de control (con 16 alumnos).

La estrategia de realimentación asistida por computadora consistió en emplear actividades extra clase mediante un programa de cómputo accesible desde internet llamado *MathUP*®.

*MathUP*® fue desarrollado, tanto en su programación como en la captura de la base de datos de ejercicios, en la Universidad Panamericana, campus Guadalajara, en México, por profesores de matemáticas de la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales (incluidas la primera y tercera autora de este documento).

A la fecha de este reporte el programa sólo es accesible para alumnos de la propia institución, aunque se podría replicar parte de su funcionamiento en las plataformas que permiten plantear cuestionarios con respuestas de opción múltiple con realimentación, como *Moodle*®.

De entre los ejercicios disponibles en *MathUP*® se seleccionaron, para usarse en este estudio, 243 ejercicios algebraicos que inciden en el desempeño de los alumnos en Cálculo Diferencial, con base en la experiencia de los profesores de la universidad sede del estudio y las investigaciones consultadas. Esos ejercicios incluían, en conjunto, más de mil realimentaciones, correspondientes a cada una de las opciones de respuesta, tanto las erróneas como las correctas. Los temas elegidos fueron: leyes de exponentes, productos notables y factorización, simplificación de fracciones algebraicas, solución de ecuaciones lineales, cuadráticas y racionales.

Las actividades mediadas con el programa *MathUP*® presentan secuencias didácticas estructuradas de ejercicios. Cada ejercicio contiene respuestas de opción múltiple de las cuales el alumno elige una. Las opciones incluyen la respuesta correcta, las incorrectas y una que dice “no encuentro mi respuesta”. Las respuestas incorrectas corresponden a los errores más comunes reportados en investigaciones anteriores y en el pretest realizado al inicio de la prueba.

De todos los errores seleccionados como opciones de respuesta se conoce al menos una posible causa. La opción que dice “no encuentro mi respuesta” está diseñada para ser elegida por alumnos que cometen errores poco comunes y de índole individual, o que no conocen la respuesta. En caso de una respuesta errónea, en la pantalla aparece la realimentación sobre la posible causa del error cometido, la forma correcta de responder al ejercicio y, si es posible, un contraejemplo.

Al estudiante se le presenta un nuevo ejercicio generado aleatoriamente con la misma estructura pero con datos cambiados. Cuando contesta correctamente, recibe una reafirmación del procedimiento y un ejemplo de un ejercicio de Cálculo Diferencial en el que se requeriría este conocimiento, para incrementar la transferencia del conocimiento. El alumno puede pasar a un ejercicio nuevo, ya que contesta correctamente el actual.

Para medir el efecto del empleo del programa propuesto, se aplicaron un pretest completamente algebraico, de 20 reactivos, separados en dos partes y dos posttest, diseñados para evaluar, específicamente, los procesos algebraicos, dentro de un contexto de Cálculo Diferencial. Por ejemplo,

en el pretest se pidió resolver la ecuación  $-x^{-2} = 0$ , mientras que en el posttest se le dio al alumno la función  $y = x^{-1}$  y su función derivada  $y' = -x^{-2}$  y se le pidió que resolviera la ecuación  $-x^{-2} = 0$ , para encontrar el valor de  $x$  para el cual la función tiene una tangente horizontal.

Así fue posible comparar los resultados. Cada posttest constó de 10 reactivos, relacionados con los temas de Cálculo Diferencial correspondientes al avance en el temario de la materia, que evaluaban el mismo proceso algebraico que el reactivo correspondiente del pretest.

A los alumnos se les asignaron actividades con el programa para contestar en casa. Aunque éstas contaban para su calificación, podían decidir no realizarlas. Por lo tanto, se consideraron, para el análisis estadístico, exclusivamente los datos de los alumnos, de los grupos experimentales, que habían realizado 80% o más de las tareas asignadas en el programa y habían contestado ambos test, ya que se evaluaron las diferencias en los porcentajes de error cometidos por cada alumno en ambos test.

Del grupo de control se tomaron los datos de todos los alumnos que contestaron ambos test. Se descartaron los datos de aquellos alumnos que realizaron menos del 80% de las actividades porque se consideró que distorsionarían las mediciones al no haber recibido el tratamiento completo. El porcentaje de uso se obtiene de un reporte que se genera en el propio programa.

Para evaluar cada reactivo se contó con una rúbrica que incluye una lista de los errores más comunes, en la que se contabiliza si implican un solo error o varios errores encadenados. El porcentaje de error de cada alumno se calculó como: número total de errores cometidos entre número máximo posible de errores en el test, ya que una respuesta a un reactivo puede contener más de un error. Para los 20 ítems el número máximo posible de errores era 38. Un reactivo no contestado o con una respuesta no incluida en la lista se contabilizó con el número máximo de errores posibles para dicho reactivo.

### Hipótesis estadística

$\bar{X}_{D_i}$ : media muestral de las diferencias ( $D$ ) en el porcentaje de errores en los test del grupo  $i$ . (GE corresponde a grupo experimental y GC corresponde a grupo control)

Hipótesis nula: Las medias muestrales de las diferencias en el porcentaje de errores en los test aplicados antes y después del tratamiento de los grupos no es significativamente diferente:

$$H_0: \bar{X}_{D_{GE1}} = \bar{X}_{D_{GE2}} = \bar{X}_{D_{GE3}} = \bar{X}_{D_{GC4}}.$$

### Hipótesis alternativa

Las medias muestrales de las diferencias en el porcentaje de errores en los test aplicados antes y después del tratamiento de los grupos es significativamente diferente para al menos un par de grupos:  $H_a: \bar{X}_{D_i} \neq \bar{X}_{D_j}$ , para algún  $i \neq j$ .

Con la prueba de hipótesis se compararon las medias muestrales de las diferencias de los porcentajes de error entre el post y el pretest del grupo de control y los grupos experimentales. Se realizó una prueba ANOVA (previa prueba de igualdad de varianzas de Levene), con una significancia de 0.05 y, como resultó que existen por lo menos un par de medias muestrales estadísticamente distintas, se usa una prueba Duncan para determinar cuáles grupos tienen promedios diferentes.

## ■ Resultados

En la tabla 1 se presenta el concentrado de datos de las medias de las diferencias en el porcentaje de error para cada grupo, en cada parte del experimento. En ella puede observarse que las medias de las diferencias en el porcentaje de error en los tres grupos experimentales (GE1, GE2 y GE3) fueron superiores a las del grupo de control (GC4) en ambas partes del experimento, aunque fue necesario hacer el análisis estadístico para saber si la diferencia era significativa.

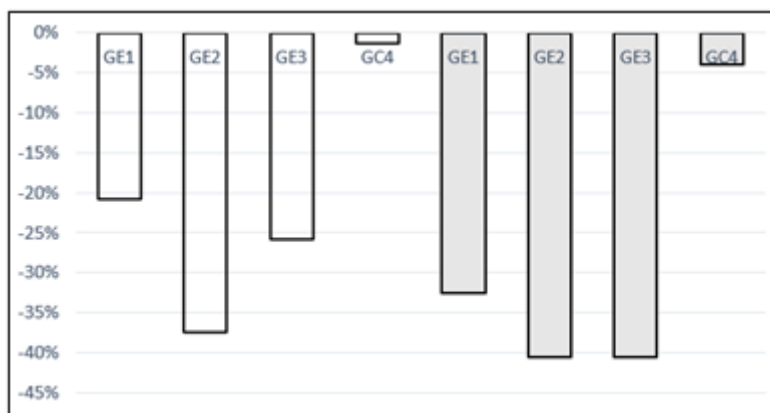
En los histogramas de la figura 1 se proporciona una comparación gráfica de las medias de las diferencias en el porcentaje de error de los distintos grupos.

**Tabla 1.** Media de las diferencias en el porcentaje de error por grupo y parte del experimento

Grupo	Parte	Cantidad de Alumnos	% error pretest 1	% error postest 1	Diferencia % post - %pre	% uso
GE1	1	7	39.6	18.8	-20.8	92
GE2	1	9	68.7	31.3	-37.4	94
GE3	1	6	58.4	32.6	-25.8	97
GC4	1	13	61.2	59.8	-1.4	0
GE1	2	5	53.8	21.3	-32.5	100
GE2	2	12	74.0	33.3	-40.6	96
GE3	2	6	79.1	38.5	-40.6	95
GC4	2	14	68.8	64.7	-4.0	0

Nota. GE = Grupo experimental y GC = Grupo control.





**Figura 1.** Medias de las diferencias en el porcentaje de error los grupos. Parte 1 en blanco y Parte 2 en gris

Las tablas 2 y 3, para las partes 1 y 2 del experimento, respectivamente, muestran una significancia de 0.000 en la prueba ANOVA, por lo cual se rechaza la igualdad de medias, es decir, se acepta que existe una diferencia significativa en las medias de entre al menos un par de grupos, en ambas partes del experimento.

**Tabla 2.** Prueba ANOVA de igualdad de medias. Parte 1. Elaboración en IBM SPSS

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	.736	3	.245	15.637	.000
Dentro de grupos	.486	31	.016		
Total	1.222	34			

**Tabla 3.** Prueba ANOVA de igualdad de medias. Parte 2. Elaboración en IBM SPSS

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	1.082	3	.361	8.009	.000
Dentro de grupos	1.486	33	.045		
Total	2.569	36			

Mediante la prueba Duncan, que genera subconjuntos de grupos cuyas medias son homogéneas, se determina que, en la primera parte del experimento, los grupos 2 y 3 forman un subconjunto homogéneo y los grupos 3 y 1 forman otro. El grupo 4 (control) no forma un subconjunto homogéneo con ninguno de los grupos experimentales (Tabla 4).

**Tabla 4.** Prueba Duncan (subconjuntos homogéneos). Parte 1. Elaboración en IBM SPSS

	Grupo	N	Subconjunto para alfa = 0.05		
			1	2	3
Duncan	GE2	9	-.37374		
	GE3	6	-.25758	-.25758	
	GE1	7		-.20779	
	GC4	13			-.01399
	Signif.		.072	.432	1.000

*Nota.* GE = Grupo experimental y GC = Grupo control

Así mismo, en la segunda parte del experimento, los grupos 1, 2 y 3 forman un subconjunto homogéneo. El grupo 4 (control) no forma un subconjunto homogéneo con ninguno de los grupos experimentales (Tabla 5).



**Tabla 5.** Prueba Duncan (subconjuntos homogéneos). Parte 2. Elaboración en IBM SPSS

	Grupo	N	Subconjunto para alfa = 0.05	
			1	2
Duncan	GE2	12	-.40625	
	GE3	6	-.40625	
	GE1	5	-.32500	
	GC4	14		-.04018
	Signif,		.486	1.000

Nota. GE = Grupo experimental y GC = Grupo control

Al finalizar el experimento, se aplicó una encuesta de opinión sobre la aplicación del programa. El 100% señaló que es atractivo y fácil de usar. Entre el 90 y el 99% consideraron que el lenguaje es comprensible y los contraejemplos les resultaron útiles. Entre el 80 y el 89% mencionaron que sí reflexionaron sobre las causas de sus errores y, también, que les agradó la flexibilidad de horario y lugar para trabajar. Entre el 70 y el 79% prefieren aprender mediante un programa.

## ■ Conclusiones

Los resultados estadísticos obtenidos en la investigación permitieron concluir que las medias de las diferencias en el porcentaje de errores algebraicos de los grupos experimentales, fueron significativamente mayores a la del grupo de control. Sólo se consideraron los datos de los alumnos que realizaron al menos 80% de las actividades asignadas en el programa.

Por lo tanto, la estrategia propuesta basada en la realimentación inmediata, clara, concreta, intencionada, significativa y personal de las causas de los errores algebraicos, puede ser un apoyo, tanto para los profesores que imparten la materia de Cálculo Diferencial como para sus alumnos, al incidir en la corrección de errores algebraicos de estos últimos. Dados los resultados positivos observados, se considera conveniente probar, en una investigación posterior, el uso de este programa en otros contextos y materias.

De acuerdo con los resultados de la encuesta, a la mayoría de los alumnos les gustó utilizar el programa, del cual consideran que es atractivo y fácil de usar. El lenguaje les pareció comprensible, así como los contraejemplos, que les resultaron útiles. La percepción de los estudiantes, reflejada en la encuesta, fue que tuvieron oportunidad de reflexionar sobre las causas de sus errores. También

señalaron que les agradó la flexibilidad de horario y lugar para trabajar. Más del 70% prefieren aprender mediante este programa.

### ■ Referencias bibliográficas

- Ausubel, D., Novak J. y Hanesian, H. (1997). *Psicología educativa. Un punto de vista cognitiva*. México, DF: Trillas.
- Cervantes, G. y Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona Próxima*, 8, 34-41.
- Díaz, J. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos, *El Cálculo y su Enseñanza*. México, D.F.: Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, Recuperado de [https://www.academia.edu/1570770/Los\\_estudiantes\\_de\\_C%C3%A1lculo\\_a\\_trav%C3%A9s\\_de\\_los\\_errores\\_algebraicos](https://www.academia.edu/1570770/Los_estudiantes_de_C%C3%A1lculo_a_trav%C3%A9s_de_los_errores_algebraicos).
- Eccius, C. (2008). *Análisis didáctico matemático de los errores en el álgebra escolar. Conocimiento de alumnos y conocimiento profesional de profesores*. Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.
- Gill, M. & Greenhow, M. (2008). How effective is feedback in Computer-Aided Assessments? *Learning, Media & Technology*, 33(3), 207-220. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1080/17439880802324145>.
- Hattie, J. y Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112.
- Meza, L, Garita, G. y Villalobos, L. (1997). Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático. En J. Trejos (Ed.) *Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM)* (pp. 208-217). Costa Rica: Liberia.
- Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 1-14. Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf>
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*, pp. 69-108. Bogotá: una empresa docente. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF>.
- Sancho, L. (1996). *Aplicaciones de la informática a la educación II*. Costa Rica: EUNED, Centro Universitario de San José.
- Santa Cruz, M., Thomsen, M., Beas, J., Rodríguez C. (2011). Análisis de las clases de errores que cometen los alumnos y propuesta de andamiaje para aquellos errores que requieren cambio

conceptual. *Revista iberoamericana de educación, Organización de Estados Iberoamericanos*, 57(1), 1-12. Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/4444StaCruz.pdf>.

Umbarila, L. (2009). El análisis de errores como herramienta para el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Inventum*, 7, 42-45. Facultad de Ingeniería Uniminuto. Recuperado de <http://biblioteca.uniminuto.edu/ojs/index.php/Inventum/article/viewFile/128/121>